

Vanessa Boily

Superviseur : Dominic Rochon

## Introduction

Les fractales sont des objets géométriques ayant des propriétés particulières. En effet, leur structure est très irrégulière et souvent autosimilaire. Certaines fractales peuvent être générées en utilisant une itération de nombres complexes. C'est le cas de l'ensemble de Mandelbrot qui est une fractale en deux dimensions. Il est possible de généraliser ce concept en utilisant d'autres nombres pour obtenir des fractales en trois dimensions.

**Objectif :** Généraliser l'ensemble de Mandelbrot en trois dimensions à l'aide des coordonnées sphériques en utilisant un produit similaire au produit de nombres complexes.

## Ensemble de Mandelbrot

Le nombre  $i$  est un nombre imaginaire tel que

$$i^2 = -1.$$

Un **nombre complexe**  $c$  s'écrit

$$c = x + yi,$$

où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels. Ces nombres sont donc représentés en deux dimensions.

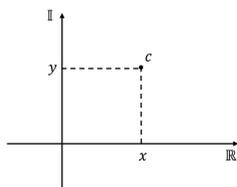


Figure 1 : Représentation graphique d'un nombre complexe

On définit l'**ensemble de Mandelbrot**  $\mathcal{M}$  comme étant l'ensemble des nombres complexes  $c_0$  tels que la suite

$$c_{m+1} = c_m^2 + c_0$$

reste bornée.

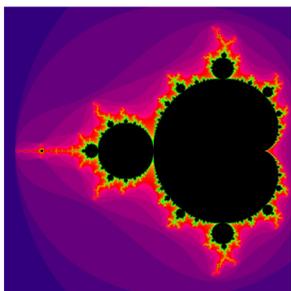


Figure 2 : Ensemble de Mandelbrot et ses couches de divergence.

## Les quaternions

On obtient les quaternions en ajoutant de nouvelles unités imaginaires aux nombres complexes. L'ensemble des quaternions est noté

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

avec  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ .

Cet ensemble en quatre dimensions forme un corps non-commutatif.

Un **quaternion pur** est un quaternion tel que  $a = 0$ . Ce sous-ensemble des quaternions, dénoté  $\text{Im}\mathbb{H}$ , est donc en trois dimensions. Les quaternions purs sont notamment utilisés pour faire des rotations en trois dimensions. De plus, on peut les utiliser pour représenter un point dans le plan 3D en positionnant les vecteurs unitaires  $i$ ,  $j$  et  $k$  sur les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  comme sur la Figure 3.

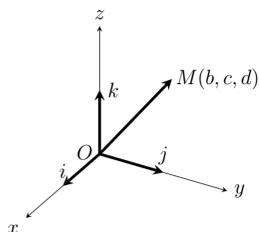


Figure 3 : Un quaternion pur représentant un vecteur du plan 3D.

## Les coordonnées sphériques

La Figure 4 montre les coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  d'un point  $P$  dans le plan 3D. Nous avons :

- $\rho \geq 0$  est la distance de l'origine à  $P$ ;
- $0 \leq \theta < 2\pi$  est l'angle formé par l'axe des  $x$  positif et la projection de  $P$  dans le plan  $xy$ ;
- $0 \leq \phi \leq \pi$  est l'angle formé par l'axe des  $z$  positif et le segment de droite  $OP$ .

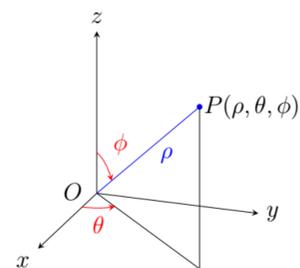


Figure 4 : Les coordonnées sphériques d'un point.

Pour passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, on utilise les équations suivantes :

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

### Remarque

Il existe un autre système de coordonnées semblable, les coordonnées géographiques. Dans ce système, les restrictions sur les angles sont  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$  et  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

## Produit sphérique de deux quaternions purs

Puisque les quaternions purs sont en trois dimensions, on peut les utiliser comme support pour représenter les coordonnées sphériques à l'aide des équations présentées ci-haut. On note la **représentation sphérique** d'un quaternion pur  $q = ai + bj + ck$  :

$$q = \rho(i \sin \phi \cos \theta + j \sin \phi \sin \theta + k \cos \phi).$$

Dans le plan 2D, la multiplication de deux nombres complexes unitaires résulte en une rotation dans le plan. Nous généralisons cette rotation dans le plan 3D en définissant le produit sphérique. Le **produit sphérique** de deux quaternions purs  $q_1$  et  $q_2$  se note :

$$q_1 \times_s q_2 := \rho_1 \rho_2 (i \sin(\phi_1 + \phi_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\phi_1 + \phi_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + k \cos(\phi_1 + \phi_2)).$$

La structure algébrique  $(\text{Im}\mathbb{H}, \times_s)$  forme un **magma unifié commutatif**.

## Généralisation de l'ensemble de Mandelbrot

L'**ensemble de Mandelbrot sphérique**  $\mathcal{M}_{\text{Im}\mathbb{H}}$  est obtenu en considérant les quaternions purs en représentation sphérique  $c_0$  tels que la suite

$$c_{m+1} = c_m \times_s c_m + c_0$$

reste bornée.

La Figure 5 montre deux points de vue de l'ensemble en trois dimensions.

### Remarque

Lorsque les coordonnées géographiques sont utilisées comme représentation sphérique, l'ensemble obtenu est différent [1].

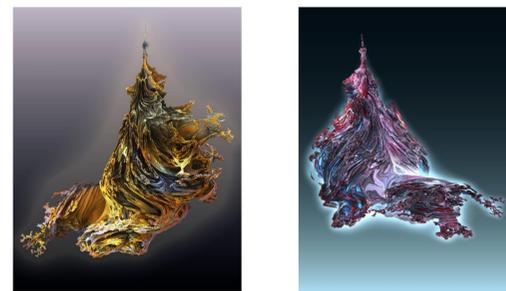


Figure 5 : Représentation de l'ensemble de Mandelbrot sphérique en collaboration avec Dominic Rochon.

### Théorème

Un quaternion pur appartient à l'ensemble de Mandelbrot sphérique si et seulement si les itérés sont bornés par 2.

Les Figures suivantes, générées en utilisant le théorème précédent, présentent trois coupes de l'ensemble de Mandelbrot sphérique. On peut voir que les coupes sont contenues dans un disque de rayon 2 centré à l'origine.

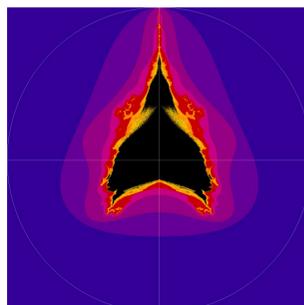


Figure 6 : Coupe de l'ensemble de Mandelbrot sphérique en  $x = 0$ .

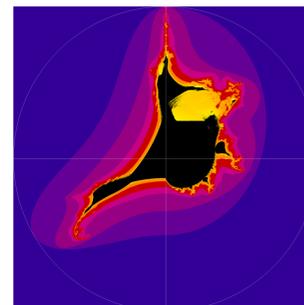


Figure 7 : Coupe de l'ensemble de Mandelbrot sphérique en  $y = 0$ .

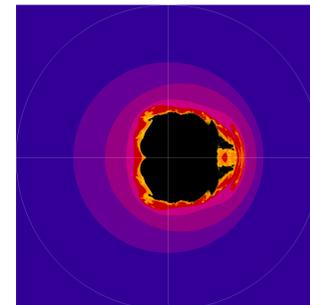


Figure 8 : Coupe de l'ensemble de Mandelbrot sphérique en  $z = 0$ .

## Conclusion

L'ensemble de Mandelbrot sphérique est une généralisation de l'ensemble de Mandelbrot parmi plusieurs autres possibles [4, 5]. Dans cette étude, nous avons démontré qu'il est réalisable de générer un ensemble de Mandelbrot dans un espace 3D avec des coordonnées sphériques. De plus, nous avons constaté qu'il est possible de générer cette ensemble en utilisant une méthode analogue à celle utilisée pour générer l'ensemble de Mandelbrot classique.

### Références principales

- [1] J. BARRALLO – « Expanding the Mandelbrot Set into Higher Dimensions », Bridges 2010 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, The Bridges Organisation : Kansas, MO, USA, 2010.
- [2] I. KANTOR & A. SOLODOVNIKOV – *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag, 1989.
- [3] J. LEYS – « Mandelbulb », CNRS, <http://images.math.cnrs.fr/Mandelbulb.html?lang=fr>, Janvier 2010, Consulté le 07-09-2021.
- [4] P.-O. PARISÉ & D. ROCHON – « A study of dynamics of the tricplex polynomial  $\eta^n + c$  », *Nonlinear Dynamics* **82** (2015), no. 1–2, p. 157–171.
- [5] A. VALLIÈRES & D. ROCHON – « Relationship between the Mandelbrot Algorithm and the Platonic Solids », *Mathematics* **10** (2022), no. 482.